

1.7 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ταυτότητα Ευκλείδειας διαίρεσης :

Για δύο οποιαδήποτε πολυώνυμα $\Delta(x)$ και $\delta(x)$ με $\delta(x) \neq 0$ μπορούμε να βρούμε δύο άλλα πολυώνυμα $\pi(x)$ και $\upsilon(x)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\Delta(x) = \delta(x)\pi(x) + \upsilon(x) \quad (1)$$

όπου το $\upsilon(x)$ είναι 0 ή ο βαθμός του είναι μικρότερος από το βαθμό του $\delta(x)$.

Η ισότητα (1) λέγεται ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του $\Delta(x)$ με το $\delta(x)$.

Το $\Delta(x)$ λέγεται διαιρετέος, το $\delta(x)$ διαιρέτης το $\pi(x)$ πηλίκο και το $\upsilon(x)$ υπόλοιπο.

2.

Υπόλοιπο 0 : Η ταυτότητα της διαίρεσης τότε γίνεται $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x)$

και η διαίρεση λέγεται **τέλεια**

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι τα $\delta(x)$ και $\pi(x)$ είναι **παράγοντες** ή **διαιρέτες** του $\Delta(x)$

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Στην εκτέλεση της διαίρεσης $\Delta(x) : \delta(x)$:

Πρέπει τα $\Delta(x)$, $\delta(x)$ να είναι στην τελική τους μορφή και διατεταγμένα κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x

2.

Δύο μεταβλητές : Αν τα Δ , δ έχουν δύο μεταβλητές, τότε επιλέγουμε τη μία και εκτελούμε τη διαίρεση.

3.

Στην τέλεια διαίρεση : Είναι φανερό ότι στην ταυτότητα $\Delta(x) = \delta(x) \pi(x)$ αν γνωρίζουμε δύο από τα τρία πολυώνυμα, μπορούμε να βρούμε το τρίτο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Να γίνουν οι διαιρέσεις και να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης .

Στις τέλειες διαιρέσεις να γράψετε το διαιρετέο σαν γινόμενο παραγόντων

α) $(x^3 - x^2 - 21x + 45) : (x + 5)$ β) $(x^4 - x^3 - 17x^2 + 21x + 36) : (x^2 + x - 12)$

γ) $(2x^3 - 3x^2 - 17x - 12) : (2x + 3)$ δ) $(y^4 + 2y^3 - 19y^2 - 8y + 65) : (y^2 - 5y + 6)$

Προτεινόμενη λύση

α)

$x^3 - x^2 - 21x + 45$ $-x^3 - 5x^2$	$x + 5$
$-6x^2 - 21x + 45$ $6x^2 + 30x$	$x^2 - 6x + 9$
$9x + 45$ $-9x - 45$	
0	

Ταυτότητα διαίρεσης : $x^3 - x^2 - 21x + 45 = (x + 5)(x^2 - 6x + 9)$

Μετατροπή σε γινόμενο : $(x + 5)(x^2 - 6x + 9) = (x + 5)(x - 3)^2$

Άρα $x^3 - x^2 - 21x + 45 = (x + 5)(x - 3)^2$

β)

$x^4 - x^3 - 17x^2 + 21x + 36$ $-x^4 - x^3 + 12x^2$	$x^2 + x - 12$
$-2x^3 - 5x^2 + 21x + 36$ $2x^3 + 2x^2 - 24x$	$x^2 - 2x - 3$
$-3x^2 - 3x + 36$ $3x^2 + 3x - 36$	
0	

Ταυτότητα διαίρεσης : $x^4 - x^3 - 17x^2 + 21x + 36 = (x^2 + x - 12)(x^2 - 2x - 3)$

Μετατροπή σε γινόμενο : $x^2 + x - 12 = x^2 + (4 - 3)x + 4(-3) =$

$= (x + 4)(x - 3)$

Και $x^2 - 2x - 3 = x^2 + (-3 + 1)x + 1(-3) =$

$= (x - 3)(x + 1)$

Άρα $x^4 - x^3 - 17x^2 + 21x + 36 = (x + 4)(x - 3)(x - 3)(x + 1)$

γ)

$2x^3 - 3x^2 - 17x - 12$ $-2x^3 - 3x^2$	$2x + 3$
$-6x^2 - 17x - 12$ $6x^2 + 9x$	$x^2 - 3x - 4$
$-8x - 12$ $8x + 12$	
0	

Ταυτότητα διαίρεσης : $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12 = (2x + 3)(x^2 - 3x - 4)$

Μετατροπή σε γινόμενο : $(2x + 3)(x^2 - 3x - 4) = (2x + 3)[(x^2 + (-4 + 1)x + 1(-4))]$
 $= (2x + 3)(x - 4)(x + 1)$

Άρα $2x^3 - 3x^2 - 17x - 12 = (2x + 3)(x - 4)(x + 1)$

δ)

$y^4 + 2y^3 - 19y^2 - 8y + 65$ $-y^4 + 5y^3 - 6y^2$	$y^2 - 5y + 6$
$7y^3 - 25y^2 - 8y + 65$ $-7y^3 + 35y^2 - 42y$	$y^2 + 7y + 10$
$10y^2 - 50y + 65$ $-10y^2 + 50y - 60$	
5	

Ταυτότητα διαίρεσης : $y^4 + 2y^3 - 19y^2 - 8y + 65 = (y^2 - 5y + 6)(y^2 + 7y + 10) + 5$

2.

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^2 - 5x + 3$

α) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x) = P(x) + P(x-2) - P(x-1) - 5$

β) Να γίνει η διαίρεση $Q(x) : (x-3)$

γ) Να αναλύσετε το $Q(x)$ σε γινόμενο παραγόντων

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} P(x-2) &= 2(x-2)^2 - 5(x-2) + 3 = 2(x^2 - 4x + 4) - 5(x-2) + 3 \\ &= 2x^2 - 8x + 8 - 5x + 10 + 3 = \\ &= 2x^2 - 13x + 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(x-1) &= 2(x-1)^2 - 5(x-1) + 3 = 2(x^2 - 2x + 1) - 5(x-1) + 3 \\ &= 2x^2 - 4x + 2 - 5x + 5 + 3 = \\ &= 2x^2 - 9x + 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε } Q(x) &= P(x) + P(x-2) - P(x-1) - 5 = \\ &= 2x^2 - 5x + 3 + (2x^2 - 13x + 21) - (2x^2 - 9x + 10) - 5 = \\ &= 2x^2 - 5x + 3 + 2x^2 - 13x + 21 - 2x^2 + 9x - 10 - 5 = \\ &= 2x^2 - 9x + 9 \end{aligned}$$

β)

$2x^2 - 9x + 9$ $-2x^2 + 6x$	$x - 3$
$-3x + 9$ $3x - 9$	$2x - 3$
0	

γ)

Από την ταυτότητα της διαίρεσης έχουμε ότι $Q(x) = 2x^2 - 9x + 9 =$
 $= (x-3)(2x-3)$

3.

Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε διαιρούμενο με το $2x^2 - 3$ να δίνει πηλίκο $5x + 6$ και υπόλοιπο $3x + 1$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{aligned}\text{Το ζητούμενο πολυώνυμο είναι το } P(x) &= (2x^2 - 3)(5x + 6) + 3x + 1 = \\ &= 10x^3 + 12x^2 - 15x - 18 + 3x + 1 = \\ &= 10x^3 + 12x^2 - 12x - 17\end{aligned}$$

4.

Να βρεθεί πολυώνυμο το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με το $x^2 - x + 1$ να δίνει γινόμενο $x^4 - x^2 + 2x - 1$

Προτεινόμενη λύση

Αν $P(x)$ το ζητούμενο πολυώνυμο τότε

$(x^2 - x + 1)P(x) = x^4 - x^2 + 2x - 1$ απ' όπου φαίνεται ότι το $P(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $(x^4 - x^2 + 2x - 1) : (x^2 - x + 1)$

x^4 $-x^4 + x^3 - x^2$	$-x^2 + 2x - 1$ $-x^2 + x - 1$	$x^2 - x + 1$
x^3 $-x^3 + x^2 - x$	$-x^2 + 2x - 1$ $-x^2 + x - 1$	$x^2 + x - 1$
x^2 $-x^2 + x - 1$	$x^2 - x + 1$	
0		

οπότε $P(x) = x^2 + x - 1$

5.

Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές και με Λ αν είναι λανθασμένες

- α) Σε μία διαίρεση που ο διαιρέτης είναι πολυώνυμο $2^{\text{ου}}$ βαθμού το υπόλοιπο είναι πολυώνυμο $1^{\text{ου}}$ βαθμού. Λ
- β) Ο βαθμός του πηλίκου είναι πάντα μικρότερος από τον βαθμό του διαιρέτη. Λ
- γ) Η διαίρεση $(x^2 - 1) : (x + 1)$ έχει υπόλοιπο 0. Σ
- δ) Το $x + 5$ είναι παράγοντας του $x^2 + 6x + 5$. Σ
- ε) Αν $P(x) = (x^2 + x + 1)(x + 2) + 2x + 3$ τότε το $2x + 3$ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 + x + 1)$. Σ

Προτεινόμενη λύση

α)

Όχι διότι το υπόλοιπο μπορεί να είναι μηδενικού βαθμού ή να μην ορίζεται ο βαθμός του. Άρα η πρόταση είναι λάθος

β)

Όχι διότι ο βαθμός του πηλίκου μπορεί να είναι ίσος ή και μεγαλύτερος από το βαθμό του διαιρέτη. Άρα πρόταση λάθος.

γ)

Ναι διότι $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ πράγμα που σημαίνει ότι το $x^2 - 1$ διαιρείται με το $x + 1$, άρα η διαίρεση είναι τέλεια, δηλαδή υπόλοιπο 0. Άρα η πρόταση σωστή

δ)

Ναι αφού $x^2 + 6x + 5 = x^2 + (1 + 5)x + 1 \cdot 5 = (x + 5)(x + 1)$. Άρα η πρόταση σωστή

ε)

Ναι διότι ο βαθμός του $2x + 3$ είναι μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη $x^2 + x + 1$. Άρα πρόταση σωστή

6.

α) Να προσδιορίσετε την τιμή του β ώστε η διαίρεση $(x^3 - x^2 + \beta x + 1) : (x + 1)$ να είναι τέλεια

β) Για $\beta = -1$, να λύσετε την εξίσωση $x^3 - x^2 + \beta x + 1 = 0$

Προτεινόμενη λύση

α)

$x^3 - x^2 + \beta x + 1$ $-x^3 - x^2$	$x + 1$
$-2x^2 + \beta x + 1$ $2x^2 + 2x$	$x^2 - 2x + (\beta + 2)$
$(\beta + 2)x + 1$ $-(\beta + 2)x - (\beta + 2)$	
$1 - (\beta + 2)$ $= -\beta - 1$	

Για να είναι η διαίρεση τέλεια, θα πρέπει $-\beta - 1 = 0$ δηλαδή $\beta = -1$

β)

Η εξίσωση $x^3 - x^2 + \beta x + 1 = 0$ για $\beta = -1$ γίνεται $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

Και από την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης γίνεται $(x + 1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$$(x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

$$x + 1 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$x = -1 \text{ ή } x = 1$$

7.

Έστω $P(x) = (2x^3 - 5x^2 + 7)(3x + 5) + 3x + 9$

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (2x^3 - 5x^2 + 7)$

β) Ομοίως της διαίρεσης $P(x) : (3x + 5)$

Προτεινόμενη λύση

α)

Με βάση τα δεδομένα αφού ο βαθμός του $3x + 9$ είναι μικρότερος από το βαθμό του $2x^3 - 5x^2 + 7$, η διαίρεση $P(x) : (2x^3 - 5x^2 + 7)$ έχει πηλίκο $3x + 5$ και υπόλοιπο $3x + 9$

β)

Τώρα το $3x + 9$ δεν μπορεί να είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (3x + 5)$ διότι ο βαθμός του $3x + 9$ δεν είναι μικρότερος από το βαθμό του $3x + 5$

$$\begin{aligned} \text{Όμως } P(x) &= (2x^3 - 5x^2 + 7)(3x + 5) + 3x + 9 = \\ &= (2x^3 - 5x^2 + 7)(3x + 5) + (3x + 5) + 4 = \\ &= (3x + 5)(2x^3 - 5x^2 + 7 + 1) + 4 = (3x + 5)(2x^3 - 5x^2 + 8) + 4 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (3x + 5)$ είναι $2x^3 - 5x^2 + 8$ και το υπόλοιπο είναι 4.

8.

α) Με τη βοήθεια της διαίρεσης $(x^5 + 1) : (x + 1)$ να αποδείξετε ότι ο αριθμός $10^5 + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 11.

β) Με τη βοήθεια της διαίρεσης $(x^5 - 1) : (x - 1)$ να αποδείξετε ότι αριθμός $20^5 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 19.

Προτεινόμενη λύση

α)

x^5	+1	$x + 1$
$-x^5 - x^4$		
$-x^4$	+1	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
$x^4 + x^3$		
x^3	+1	
$-x^3 - x^2$		
$-x^2$	+1	
$x^2 + x$		
x	+1	
$-x - 1$		
0		

Η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει $x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$

Για $x = 10$ έχουμε $10^5 + 1 = (10 + 1)(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1) =$

$$= 11 \cdot (\text{ακέραιος}) =$$

$$= \text{πολλαπλάσιο του 11}$$

β)

Ομοίως η ταυτότητα της διαίρεσης δίνει $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

Για $x = 20$ έχουμε $20^5 - 1 = (20 - 1)(20^4 + 20^3 + 20^2 + 20 + 1) =$

$$= 19 \cdot (\text{ακέραιος}) =$$

$$= \text{πολλαπλάσιο του 19}$$

9.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $[(x + 3y)^2 + 4(x + 2y)^2 - (x + y)^2] : 4(x + 3y)$

β) Να αναλύσετε το πολυώνυμο $(x + 3y)^2 + 4(x + 2y)^2 - (x + y)^2$ σε γινόμενο παραγόντων

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} (x + 3y)^2 + 4(x + 2y)^2 - (x + y)^2 &= x^2 + 6xy + 9y^2 + \\ &\quad 4(x^2 + 4xy + 4y^2) - \\ &\quad (x^2 + 2xy + y^2) = \\ &= x^2 + 6xy + 9y^2 + \\ &\quad 4x^2 + 16xy + 16y^2 \\ &\quad - x^2 - 2xy - y^2 = 4x^2 + 20xy + 24y^2 \end{aligned}$$

$4(x + 3y) = 4x + 12y$ οπότε θεωρώντας σαν μεταβλητή το x έχουμε

$4x^2 + 20xy + 24y^2$ $- 4x^2 - 12xy$	$4x + 12y$
$8xy + 24y^2$ $- 8xy - 24y^2$	$x + 2y$
0	

β)

Από την ταυτότητα της διαίρεσης είναι $4x^2 + 20xy + 24y^2 = 4(x + 3y)(x + 2y)$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } (x + 3y)^2 + 4(x + 2y)^2 - (x + y)^2 &= 4x^2 + 20xy + 24y^2 = \\ &= 4(x + 3y)(x + 2y) \end{aligned}$$